Chapitre 23 : Séries

1 Généralités

1.1 Définition

Définition 1.1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$
On dit que <u>la série $\sum u_n$ converge</u> si la suite $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et qu'elle <u>diverge</u> sinon.

- ∗ Le nombre $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ est la <u>n-ième somme partielle</u> de la serie.
- ∗ Le nombre u_n est le <u>terme général</u> de la série.
- ∗ Si la série converge, la <u>somme</u> de la série est $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$

Proposition 1.2 (Linéarité de la somme)**.** Soit $\sum\limits_n u_n$ est $\sum\limits_n v_n$ deux séries convergentes.
Alors $\sum\limits_n (u_n + \lambda v_n)$ converge pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + \lambda v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Définition 1.3. Soit $\sum\limits_n u_n$ est une série convergente.
Le <u>n-ième reste</u> de la série est la somme $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$

Proposition 1.4. La suite des restes d'une série convergente converge vers 0.

1.2 Divergence grossière

Proposition 1.5. Soit $\sum\limits_n u_n$ une série convergente.
Alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

1.3 Critère spécial des séries alternées

Théorème 1.6. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle :

- ∗ décroissante
- ∗ telle que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Alors la série $\sum\limits_n (-1)^n u_n$ converge.

2 Séries à termes positifs

Définition 2.1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles positives.
On dit alors que $\sum\limits_n u_n$ est <u>une série à termes positifs</u> (SÀTP)

2.1 Théorèmes de comparaison

Théorème 2.2. Soit $\sum\limits_n u_n$ est $\sum\limits_n v_n$ deux SÀTP telles que $u_n \leq v_n$ àpcr.
Alors $\sum\limits_n v_n$ converge $\implies \sum\limits_n u_n$ converge.

Corollaire 2.3.

- $*$ Soit $\sum\limits_n u_n$ et $\sum\limits_n v_n$ deux SÀTP telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(v_n)$
  Alors $\sum v_n$ converge $\implies \sum u_n$ converge.
- $*$ C'est en particulier le cas si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ ou si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$

2.2 Comparaison série-intégrale

Théorème 2.4 (Comparaison série/intégrale, cas décroissant)**.** Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ décroissante et continue par morceaux.
Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\int_1^{n+1} f \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \int_1^{n+1} f + f(1) - f(n+1)$$

Théorème 2.5. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et croissante.
Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^{n+1} f - (f(n+1) - f(0)) \leq \sum_{k=0}^{n} f(k) \leq \int_0^{n+1} f$$

Théorème 2.6 (Série de Riemann)**.** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$
Alors la série $\sum\limits_n \frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$

Remarque : On définit la fonction zêta de Riemann

$$\zeta : \begin{cases}]1, +\infty[\to \mathbb{R} \\ s \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \end{cases}$$

Par exemple, $\zeta(s) = \frac{\pi^2}{6}, \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$

Remarque : On définit le n-ième nombre harmonique $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$
La démonstration du théorème précédent donne

$$H_n = \ln(n) + o(1)$$

Plus précisément

$$H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$$

avec $\gamma = \lim\limits_{n\to+\infty} H_n - ln(n)$

3 Séries absolument convergentes

3.1 Convergence

Définition 3.1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$
On dit que $\sum\limits_n u_n$ converge absolument si $\sum\limits_n |u_n|$ converge.

Théorème 3.2. Soit $\sum\limits_n u_n$ une série (de terme général complexe) absolument convergente.
Alors $\sum\limits_n u_n$ converge.

Théorème 3.3. Soit $\sum\limits_n u_n$ et $\sum\limits_n v_n$ deux séries à valeurs complexes.
Si $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ et que $\sum\limits_n v_n$ converge absolument, alors $\sum u_n$ converge absolument.